



TITLE:

Polynomial hulls of graphs on the torus (Analytic Function Spaces and Operators on these Spaces)

AUTHOR(S):

神保, 敏弥

CITATION:

神保, 敏弥. Polynomial hulls of graphs on the torus (Analytic Function Spaces and Operators on these Spaces). 数理解析研究所講究録 2000, 1137: 51-56

ISSUE DATE:

2000-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/63799>

RIGHT:

Polynomial hulls of graphs on the torus

奈良教育大学 神保敏弥

(Toshiya Jimbo)

1. 問題と関連する結果

K を \mathbb{C}^n のコンパクト部分集合とし、 $C(K)$ を K 上の複素数値連続関数の Banach 環とする。 $f \in C(K)$ のノルムは sup-norm $\| \cdot \|$ とする。関数 $f_1, \dots, f_m \in C(K)$ の多項式によって生成される関数環を $[f_1, \dots, f_m; K]$ とおく。 \mathbb{C}^n の座標 z_1, \dots, z_n によって生成される K 上の関数環を $P(K)$ で表す。 K の多項式凸包 polynomial hull \hat{K} は、

$$\hat{K} = \{z \in \mathbb{C}^n : |p(z)| < \|p\|, \text{ for every polynomial } p\}.$$

によって定義される。 $\hat{K} = K$ を満たすとき、 K は多項式凸集合 polynomially convex set といわれる。関数 f のグラフを Σ , Σ_f または $\Sigma(f, K)$ で表す、すなわち

$$\Sigma = \{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^{n+1} : z \in K\}.$$

π は $\mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ への、 $\pi(z, z_{n+1}) = z$, $z \in \mathbb{C}^n$ によって定義される射影とする。 $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, $T = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ とし、 $T^2 = T \times T$ とする。 $B = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^n |z_j|^2 < 1\}$ とし、その境界である超球面を ∂B で表す。

グラフの多項式凸包については、次のような問題が最近研究されてきている。どんな K, f に対して、

(1) グラフ Σ_f は多項式凸集合となるか？ そのとき、近似問題 $P(\Sigma_f) = C(\Sigma_f)$ すなわち $[z_1, \dots, z_n, f; K] = C(K)$ は成立するか？

(2) $\hat{\Sigma} \neq \Sigma$ のとき、 $\hat{\Sigma} \setminus \Sigma$ の (解析) 構造はどうなっているか？ $\hat{\Sigma} \setminus \Sigma$ のハウスドルフ次元の最大となる例は何か？ などである。

K が円周 T の場合には、Wermer の maximality theorem によって、 $f \in C(T)$ のグラフについては、 $\pi(\hat{\Sigma}) = \bar{D}$ または $\pi(\hat{\Sigma}) = T$ のいずれかが起こる。

K が超球面 ∂B の場合には、H.Alexander ([A1]) は、 $f \in C(T)$ のグラフについては常に $\pi(\hat{\Sigma}) = \bar{B}$ が成立することを示した。さらに f が超球 \bar{B} 上で多重調和な関数 g の ∂B 上への制限関数ならば、 $\hat{\Sigma}_f = \Sigma(g, \bar{B})$ となることを示した。ハウスドルフ次元については、 K が \mathbb{C}^2 の超球 \bar{B} の場合で、 $f(z_1, z_2) = z_1 \bar{z}_2$ の時、 $\hat{\Sigma} \setminus \Sigma$ は 6 次元になることが示されている ([AR])。

ここでは、 K を \mathbb{C}^2 内のトーラス $T^2 = T \times T$ とし、関数 f は主に同次多項式の複素共役関数の場合の結果を報告する。

定理. 自然数 n と複素数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$ に対して、 $J = \{j \in \{1, \dots, n\} : |\lambda_j| = 1\}$ とし、 $f(z_1, z_2) = (\bar{z}_1 - \bar{\lambda}_1 z_2) \cdots (\bar{z}_1 - \bar{\lambda}_n z_2)$ とおく。

- (1) $J = \emptyset$ ならば、 $\hat{\Sigma} = \Sigma$. さらに $[z_1, z_2, f; T^2] = C(T^2)$,
- (2) $J \neq \emptyset$ ならば、 $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \bigcup_{j \in J} \{(z_1, z_2, 0) : z_1 - \lambda_j z_2 = 0, z_2 \in D\}$.

2. 補題と例

M は \mathbb{C}^n のある開集合 U の C^∞ 級の実多様体とする。点 $x \in M$ での M の接空間を $T_x M$ で表す。 M が全実 totally real であるとは、各 $x \in M$ に対して $T_x M$ が自明でない複素部分空間を含まないときをいう。すなわち、 $T_x M \cap iT_x M = \{0\}$.

補題 1. ρ_j , $j = 1, \dots, n$ を U での C^∞ 級実数値関数とする。 $N = \{z \in U : \rho_j(z) = 0, j = 1, \dots, n\}$ とおく。 N 上で複素 Jacobian が $\det(\frac{\partial \rho_j}{\partial z_k}) \neq 0$ を満たすとする。このとき、

- (1) N は U の totally real submanifold である。
- (2) f が U で C^∞ 級関数ならば、グラフ $\Sigma(f, N)$ はまた $U \times \mathbb{C}$ 内の totally real submanifold である。

補題 2. ([NW], cf. [AW2])

M は U 内の C^∞ 級の totally real submanifold であるとする。このとき、

- (1) 点 $z^0 \in M$ に対して、 $\bar{B}_0 \cap M$ が多項式凸集合となる様な z^0 を中心とする小さな超球 B_0 が存在する。
- (2) K が M 内のコンパクト部分集合ならば、 $P(K) = C(K)$.

この補題は、 M が、totally real set の場合に拡張されている ([S1])。

L は \mathbb{C}^2 のある開集合内のコンパクト多項式凸集合とする。 g と h は U で正則な関数とし、 $N = \{z \in U : \bar{g}(z) = h(z)\}$ とおく。

補題 3. コンパクト集合 K が $L \cap N$ に含まれるならば、 $\hat{K} \subset L \cap N$.

さて、totally real の判定条件のために、

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g(z)}{\partial z_1} & \frac{\partial g(z)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial h(z)}{\partial z_1} & \frac{\partial h(z)}{\partial z_2} \end{vmatrix}.$$

とおく。

補題 4. 点 $z_0 \in N$ が条件 $\Delta(z^0) \neq 0$ を満たすならば、 $B_0 \cap N$ が totally real submanifold である様な z^0 を中心とする開球 B_0 が存在する。

証明. $z_j = x_j + iy_j$ ($x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$) とし、 $g = u + iv$, $h = U + iV$ (u, v, U, V は実数値関数) とする。さらに $\rho_1 = U - u_1$, $\rho_2 = V + v$

とおくと、 $N = \{z \in U : \rho_j(z) = 0, j = 1, 2\}$ となる。Cauchy-Riemann の関係式によって、

$$\frac{\partial v}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} - i \frac{\partial v}{\partial y_j} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} + i \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \frac{-i}{2} \frac{\partial u}{\partial z_j}.$$

を得る。簡単な計算によって、

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial \rho_j}{\partial z_k} \right) &= -i \{ (U_{z_1} - u_{z_1})(U_{z_2} + u_{z_2}) - (U_{z_2} - u_{z_2})(u_{z_1} + u_{z_1}) \} \\ &= -2i(U_{z_1}u_{z_2} - u_{z_1}U_{z_2}) = \frac{i}{2}(h_{z_2}g_{z_1} - h_{z_1}g_{z_2}). \end{aligned}$$

補題 1 によって、結論を得る。

A は単位元を持つ可換 Banach algebra とし、 $\mathcal{M}(A)$ を A の極大イデアル空間とする。 $f \in A$ の Gelfand 変換を \hat{f} で表し、 $\hat{A} = \{\hat{f} : f \in A\}$ とおくと、 \hat{A} の Shilov 境界を $S(A)$ で表す。 $f_1, \dots, f_m \in A$ の合同スペクトルを

$$\sigma(f_1, \dots, f_m) = \{(\hat{f}_1(\varphi), \dots, \hat{f}_m(\varphi)) \in \mathbb{C}^m : \varphi \in \mathcal{M}(A)\}.$$

とおく。

補題 5 (cf. [AW2]). f_1, \dots, f_m は A の生成元とするならば、 $\sigma(f_1, \dots, f_m)$ は \mathbb{C}^m 内の多項式凸集合である。さらに、 $\Phi(\hat{f}_1(\varphi), \dots, \hat{f}_m(\varphi))$ によって定義される写像 $\Phi : \mathcal{M}(A) \rightarrow \mathbb{C}^m$ は、 $\sigma(f_1, \dots, f_m)$ の上への位相同型である。

このことから、 $A = P(K)$ のとき、 $\mathcal{M}(P(K))$ と \hat{K} とは自然に同一視され、 $\hat{A} = P(\hat{K})$ と考えて良いことになる。そこで、Shilov の Idempotent theorem を $P(K)$ に当てはめれば、次を得る。

補題 6. K が \mathbb{C}^n の連結部分集合ならば、その多項式凸包 \hat{K} は、また連結集合である。

補題 7. (Rossi の local maximum modulus principle)

$\psi \in \mathcal{M}(A) \setminus S(A)$ に対して、 $\psi \in \mathcal{M}(A) \setminus S(A)$ 内の ψ の開近傍を U とする。このとき、 $f \in A$ に対して、次を得る。

$$|\hat{f}(\psi)| \leq \max_{\varphi \in \partial U} |\hat{f}(\varphi)|.$$

補題 8. L は \mathbb{C}^2 の開集合 U 内のコンパクト多項式凸連結部分集合とする。 f と g は U で正則な関数とし、 $N = \{z \in U : f(z) = g(z)\}$ とおく。 K は $N \cap L$ に含まれるコンパクト部分集合とする。このとき、点 $z^0 \in N \cap L \setminus K$ が $\Delta(z^0) \neq 0$ を満たすならば、 $z^0 \notin \hat{K}$ 。

証明. $z^0 \in \hat{K} \setminus K$ とする。補題 2 と 4 から 次の様な z^0 を中心とする小さな超球 B_0 が存在する:

$$\bar{B}_0 \cap K = \phi, \quad P(\bar{B}_0 \cap N) = C(\bar{B}_0 \cap N).$$

$V = N \cap \hat{K} \cap B_0$ とおき bV は \hat{K} 内の V の境界とする。

もし $bV = \phi$ ならば \hat{K} 内で $\bar{V} = V$ である。それ故、 $\bar{V} \cap \hat{K} \setminus V = \phi$. \hat{K} は連結であるので このことは起こらない。

$bV \neq \phi$ ならば、次の様な関数 $f \in C(\bar{V})$ が存在する:

$$|f(z^0)| > 1, \quad \|f\|_{bV} < 1.$$

$P(\bar{V}) = C(\bar{V})$ であるので、 f を近似する多項式 p で、 $|p(z^0)| > 1$, $\|p\|_{bV} < 1$ を満たすものが存在する。他方、Rossi の局所最大値の原理から $|p(z^0)| \leq \|p\|_{bV}$ を得る。これは矛盾である。故に $z^0 \notin \hat{K}$ となる。

次の補題は論文 [AR], [AW2] と全く同じ方法で示される。

補題 9. $f \in C(T^2)$ とし、 $(z_1^0, z_2^0) \in T^2$ かつ $(z_1^0, z_2^0, z_3^0) \in \hat{\Sigma}$ ならば $z_3^0 = f(z_1^0, z_2^0)$ となる。

例 1. 自然数 n に対して $f(z_1, z_2) = \bar{z}_1^n$ とするならば、次を得る。

$$\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi)} \{(e^{i\theta}, z_2, e^{-ni\theta}) : z_2 \in D\},$$

それ故、 $\pi(\hat{\Sigma}) = T \times \bar{D}$.

例 2. 自然数 m, n に対して $f(z_1, z_2) = \bar{z}_1^m \bar{z}_2^n$ とする。このとき、次を得る。

$$\hat{\Sigma} = \Sigma, \quad [z_1, z_2, f; T^2] = C(T^2).$$

例 3. $f(z_1, z_2) = z_1 \bar{z}_2$ のグラフ Σ の多項式凸包は

$$\hat{\Sigma} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 = z_2 z_3, |z_2| \leq 1, |z_3| \leq 1\}$$

となる。この場合、 $\hat{\Sigma} \setminus \Sigma$ のハウスドルフ次元は 4 次元である。

3. 定理の証明

$a = \prod_{j=1}^n (1 + |\lambda_j|)$ とおく。 $\|f\|_{T^2} \leq a$ であるので $\hat{\Sigma} \subset \bar{D}^2 \times a\bar{D}$. トーラス T^2 上で $z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 = 1$ であるので

$$N = \{(z_1, z_2, z_3) \in \bar{D}^2 \times a\bar{D} : z_3 - \prod_{j=1}^n (\bar{z}_1 - \bar{\lambda}_j \bar{z}_2) = 0, \\ z_1^n z_2^n z_3 - \prod_{j=1}^n (z_2 - \bar{\lambda}_j z_1) = 0\}.$$

とおけば、補題によって、 $\hat{\Sigma} \subset N$ を得る。 $E = \bar{D} \times \{0\} \cup \{0\} \times \bar{D}$ とおき、 z_3 を消去した式から、

$$M = \{(z_1, z_2) \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E) : \prod_{j=1}^n (\bar{z}_1 - \bar{\lambda}_j \bar{z}_2) = \frac{1}{z_1^n z_2^n} \prod_{j=1}^n (z_2 - \bar{\lambda}_j z_1)\}$$

とおく。 M の totally real 性を判定するために、 M を定義する式の左辺を $\bar{g}(z_1, z_2) = f(z_1, z_2)$ 右辺を $h(z_1, z_2) = \frac{k(z_1, z_2)}{z_1^n z_2^n}$ ($k(z_1, z_2)$ は多項式) とおくと、 $\Delta(z_1, z_2) = g_{z_1} h_{z_2} - g_{z_2} h_{z_1}$

$$= \frac{1}{z_1^{n+1} z_2^{n+1}} \{g_{z_1} (k_{z_2} z_1 z_2 - n z_1 k) - g_{z_2} (k_{z_1} z_1 z_2 - n z_2 k)\}.$$

この分子は次数 $n+1$ の同次多項式で、 z_1^{n+1} と z_2^{n+1} の係数はそれぞれ $-n^2 \bar{a}_n$ と $n^2 a_n$ となる。それ故、totally real 性を判定出来ない集合を $G = \{z \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E) : \Delta(z) = 0\}$ とおくと、次の式を満たす 0 でない複素数 μ_j , $j = 1, \dots, 2n$ が存在する：

$$G = \bigcup_{j=1}^{2n} \{z \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E) : \frac{z_2}{z_1} = \mu_j\}.$$

そこで

$$G_j = \{z \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E) : z_2 - \mu_j z_1 = 0\},$$

$$D_j^* = \{(z_1, z_2, 0) : z_1 - \lambda_j z_2 = 0, z_2 \in D\}$$

とおき、 $D_j = \pi(D_j^*)$ とおく。

さて、(2) の場合 $J \neq \phi$ なので $j \in J$ とせよ。すると $\{(z_1, z_2, 0) : z_1 - \lambda_j z_2 = 0, z_2 \in T\} \subset \Sigma$ であるので、 $D_j^* \subset \hat{\Sigma}$ を得る。今 $|\lambda_1| = 1$ と仮定すると、 $g = \bar{f} = (z_1 - \lambda_1 z_2) F(z_1, z_2)$, $h = (z_1 - \lambda_1 z_2) H(z_1, z_2)$ (F, H は正則関数) とかけるので、 $(z_1, z_2) \in D_1$ ならば、 $\Delta(z_1, z_2) = 0$ を得る。

まず、 $J = \{1, \dots, n\}$ と仮定すると、点 $(z_1, z_2) \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E \cup \bigcup_{j=1}^n \pi(D_j))$ に対して、

$$|h(z_1, z_2)| = \left| \frac{(-\bar{\lambda}_1) \cdots (-\bar{\lambda}_n)}{z_1^n z_2^n} \prod_{j=1}^n (z_1 - \lambda_j z_2) \right| < |\bar{f}(z_1, z_2)|$$

となるので、 $(z_1, z_2) \notin M$. ゆえに $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \bigcup_{j \in J} D_j$.

次に $J \neq \phi$ かつ $J \neq \{1, \dots, n\}$ とする。このとき $J = \{1, 2, \dots, k\}$, $1 \leq k < n$ と仮定して良い。すると上での観察から $\mu_j = \bar{\lambda}_j$, $j = 1, \dots, k$ となる。集合 $(M \setminus \bigcup_{j \in J} D_j) \cap G_j$ を考えるために、 M の式に、 $z_2 = \mu_j z_1$ を代入して、次を得る。

$$|z_1|^{2n} = \frac{|\mu_j - \bar{\lambda}_{k+1}|}{|1 - \lambda_{k+1} \mu_j|} \cdots \frac{|\mu_j - \bar{\lambda}_n|}{|1 - \lambda_n \mu_j|} \frac{1}{|\mu_j|^n}.$$

このとき、 $|z_1|$ に解があれば、 $|z_1| = \rho_j$ とおく。 $M_j = (M \setminus \bigcup_{k \in J} D_k) \cap G_j$ とおく。

もし $0 < \rho_j < 1$, または $\rho_j = 1$, $|\mu_j| < 1$ のときは、

$$M_j \subset \bigcup_{j \notin J} \{(z_1, z_2) \in \bar{D}^2 \setminus (T^2 \cup E) : z_1 - \lambda_j z_2 = 0, |z_2| = \rho_j\}$$

を得る (ただし、 M_j は空集合でもよい)。それ故、 $\bigcup_j M_j \cap (\bigcup_j D_j \cup T^2) = \phi$ を得る。従って、次の条件を満たす $\bigcup D_j \cup T^2$ の開近傍 V が存在する： $V \cap (\bigcup D_j \cup T^2)$ が totally real submanifold である。補題によって、グラフ $\Sigma(f, V \cap (\bigcup D_j \cup T^2))$ は totally real である。それ故、 $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \bigcup_{j \in J} D_j$ 。これ以外の ρ_j の場合には、 $M_j = \phi$ であるので問題ない。

(1) $J = \phi$ の時、 $I = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : |\mu_i| = 1\}$ と置く。

(a) もし $I = \phi$ ならば $V \cap G = \phi$ である様な V の開近傍が存在する。それ故、 $\Sigma(f, V \cap M \setminus T^2)$ は totally real であるので、 $\hat{\Sigma} = \Sigma$ を得る。

(b) もし $I \neq \phi$ かつ $i \in I$ ならば、 $z_2 = \mu_i z_1$ を M の式に代入して $|z_1|^{2n} = |\prod_j \frac{\mu_i - \lambda_j}{1 - \bar{\lambda}_j \bar{\mu}_i}| = 1$ を得る。故に、 $|z_1| = 1$ 。故に M は totally real であるのでグラフ $\Sigma(f, M)$ もまた totally real である。故に、 $\hat{\Sigma} = \Sigma$ 。

最後に、この問題を考えていくうえで、阪井先生とのコミュニケーションと適切なアドバイスをいただいたことは大変有益で、支えとなりました。ここに感謝いたします。

References

- [AR] P. Ahern and W. Rudin, 'Hulls of 3-spheres in \mathbb{C}^3 ', Contemporary Math. 137 (1992) 1-27.
- [A1] H. Alexander, 'Polynomial hulls of graphs', Pacific J. Math. 147 (1991) 201-212.
- [AW1] H. Alexander and J. Wermer, 'Polynomial hulls with convex fibers', Math. Ann. 271 (1985), 99-109.
- [AW2] H. Alexander and J. Wermer, 'Several Complex Variables and Banach Algebras', Springer-Verlag, (1998).
- [JS] T. Jimbo and A. Sakai, 'Polynomially convex hulls of graphs on the sphere', Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 2795-2766.
- [NW] R. Nirenberg and R. O. Wells, Jr, 'Approximation theorems on differentiable submanifolds of a complex manifold', Trans. Amer. Math. Soc. 142 (1969) 15-35.
- [S1] A. Sakai, 'On totally real sets', Geometric Complex Analysis edited by J. Noguchi et. al. World Scientific Publ. Co. (1996) 525-533.